УДК 519.248.6

М.В.ЧУВЕЙКО

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПЕРИОДИЗИРОВАННОГО СИГНАЛА В РОТОРНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается алгоритм восстановления периодической составляющей сигнала в системах с аддитивной помехой амплитудного характера при отсутствии априорных сведений о частоте восстанавливаемого сигнала.
Ключевые слова: *восстановление сигнала, средняя за период мощность, усиленный закон больших чисел.*

Введение. Большинство механических систем в своем составе имеют узлы, совершающие вращательные движения. При стационарном режиме функционирования (неизменные угловые частоты) данных узлов такой вид движения характерен тем, что координаты состояния таких систем являются периодическими функциями времени или пространственных перемещений. Факторы, вызывающие периодические вариации координат состояния, разнообразны. При обработке на металлорежущих станках – это разнообрабатываемость, вызывающая погрешности формы поперечного сечения. При рассмотрении качества роторных фрикционных систем – это развитие неравномерности износа по периоду вращения. К таким же эффектам приводит дисбаланс роторных систем. Эта особенность позволяет сделать вывод о том, что проявления возможных дефектов данных узлов также будут носить характер, близкий к периодическому. Таким образом, задача диагностики работоспособности системы может быть сведена к восстановлению периодических составляющих в выходном сигнале и анализу причастности тех или иных механизмов к их формированию.

Алгоритм восстановления периодической составляющей. Пусть задана функция

$$F(t) = f(t) + \varepsilon(t), \qquad (1)$$

где $\varepsilon(t)$ - случайный стационарный (в узком смысле) процесс, удовлетворяющий свойствам: для $\forall t$ выполняется $M\varepsilon(t) = 0$, $\varepsilon(t_1)$ и $\varepsilon(t_2)$ независимы при $t_1 \neq t_2$; $f(t) = f(t - T)$ - кусочно-монотонная ограниченная периодическая функция с периодом T.

Наиболее очевидным и простым методом восстановления формы периодической составляющей является операция усреднения с периодом T.

Определим операцию усреднения функции $F(t)$ с периодом τ следующим образом:

$$\tilde{f}_\tau(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{F(t + k\tau)}{n+1}. \qquad (2)$$

При усреднении с периодом T из усиленного закона больших чисел [1] очевидно, что

$$P\left\{\left|\tilde{f}_T(t) - f(t)\right| \to 0\right\} = 1.$$

В большинстве случаев точная величина периода T неизвестна, но задан некоторый диапазон возможных значений. В таком случае необходимо провести дополнительное исследование, направленное на получение периода усреднения.

Теорема. Среди множества функций $\tilde{f}_\tau(t)$ почти наверное наибольшими и равными между собой значениями средней за период мощности

$$\rho(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}_\tau(t)^2\,dt$$

обладают те и только те функции, для которых выполняется следующее равенство: $\tau = Tn$, где $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

1. Сначала докажем это для случая, когда $f(t) = \sin(\omega t + \psi)$, где $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. Представим функцию следующим образом: $f(t) = \mathrm{Im}(e^{i\omega t})$. Тогда формула (2) примет вид

$$\tilde{f}_\tau(t) = \mathrm{Im}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i(\omega t+\psi+k\varphi)}}{n+1}\right) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon(t+k\tau)}{n+1}, \qquad (3)$$

где $\varphi = \frac{2\pi\tau}{T}$.

Исходя из свойств $\varepsilon(t)$ можно заключить, что для любого t почти наверное

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon(t+k\tau)}{n} = 0.$$

Тогда

$$\tilde{f}_\tau(t) = \mathrm{Im}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i(\omega t+\psi+k\varphi)}}{n+1}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{i(\omega t+\psi)}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ik\varphi}}{n+1}\right).$$

Рассмотрим отдельно

$$U = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ik\varphi}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\sum_{k=1}^{n}e^{ik\varphi}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} + e^{i\varphi}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sum_{k=1}^{n-1}e^{ik\varphi}}{n+1} = e^{i\varphi}U.$$

Но такое возможно лишь при $U = 0$, если $\varphi \neq 2\pi n$. Если же $\varphi = 2\pi n$, легко видеть, что

$$U = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i2\pi k}}{n+1} = 1.$$

Исходя из этого интеграл:

$$\rho(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}_\tau(t)^2\,dt = \begin{cases} 0.5, & \text{если } \tau = Tn; \\ 0, & \text{если } \tau \neq Tn. \end{cases}$$

2. Теперь докажем это для случая, когда $f(t)$ - произвольная периодическая функция, удовлетворяющая указанным ранее свойствам. Представим функцию в виде ряда Фурье:

$$f(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(i\omega t + \psi_i),$$

тогда формула (2) примет вид:

$$\tilde{f}_\tau(t) = A_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(i\omega t + \psi_i)}{n+1}; \qquad (4)$$

$$\tilde{f}_\tau(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(i\omega t + \psi_i + k\varphi)}{n+1}.$$

Исходя из доказанного ранее получаем:

$$V_i(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(i\omega t + \psi_i + k\varphi)}{n+1} = \begin{cases} \sin(i\omega t + \psi_i), & \text{если } \tau = Tn/i; \\ 0, & \text{если } \tau \neq Tn/i; \end{cases}$$

$$\tilde{f}_\tau(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i V_i(t).$$

То есть функция $\tilde{f}_\tau(t)$ почти наверное будет равна $f(t)$, при $\tau = Tn$, в остальных случаях некоторые гармонические составляющие обратятся в ноль. Но тогда для $\tau \neq Tn$

$$\rho_m(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T (\tilde{f}_\tau(t) + G_\tau(t))^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}_\tau(t)^2\,dt + \frac{2}{T}\int_0^T \tilde{f}_\tau(t) G_\tau(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T G_\tau(t)^2\,dt \qquad (5)$$

где $G_\tau(t) = \sum_{i=M:V_i \neq 0} A_i \sin(i\omega t + \psi_i)$; $\rho_m(\tau)$ - значение средней за период мощности при $\tau = Tn$.

Учитывая, что $\frac{2}{T}\int_0^T \tilde{f}_\tau(t) G_\tau(t)\,dt = 0$, тогда

$$\rho_m(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}_\tau(t)^2 dt + \frac{1}{T}\int_0^T G_\tau(t)^2 dt = \rho(\tau) + \frac{1}{T}\int_0^T G_\tau(t)^2 dt .$$

Так как $\frac{1}{T}\int_0^T G_\tau(t)^2 dt > 0$, теорема доказана.

Учитывая, что период интегрирования T нам неизвестен, то для получения средней за период мощности можно использовать $T \gg T$, так как

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}_\tau(t)^2 dt = \rho\left(T\right).$$

Пример использования алгоритма для диагностирования погрешности поперечного сечения при токарной обработке. Предварительные исследования спектрального состава сигнала виброакустической эмиссии показали, что при токарной обработке стали 20Х инструментом Т15К6 с частотой вращения шпинделя $\Omega = 10$ Гц спектр сигнала в частотном диапазоне 100-10 кГц имеет две явно выраженные частоты: $\omega_1 = 2{,}5$ кГц и $\omega_2 = 800$ Гц. Рассмотрим возможность восстановления периодизированного с частотой Ω сигнала в наблюдаемом сигнале виброакустической эмиссии (рис.1).

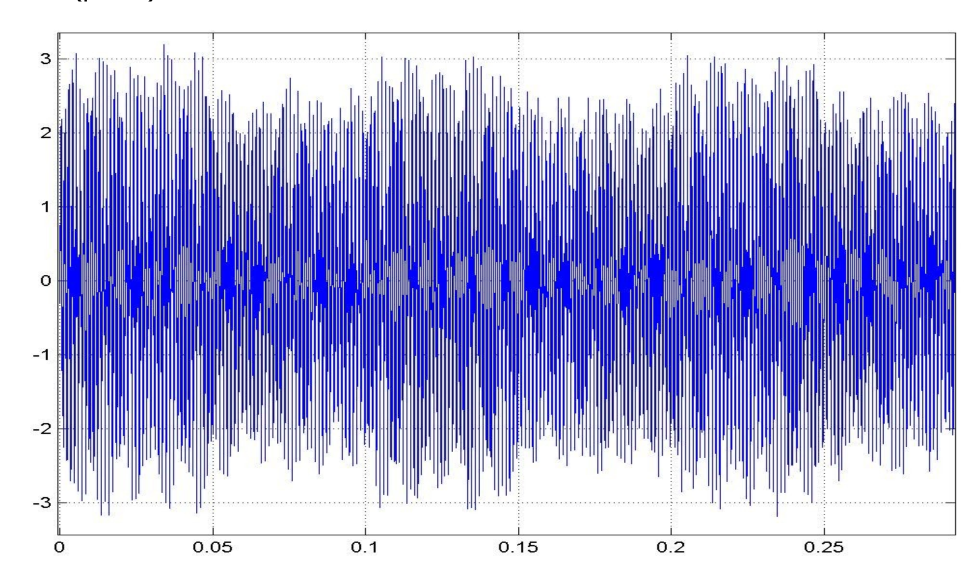
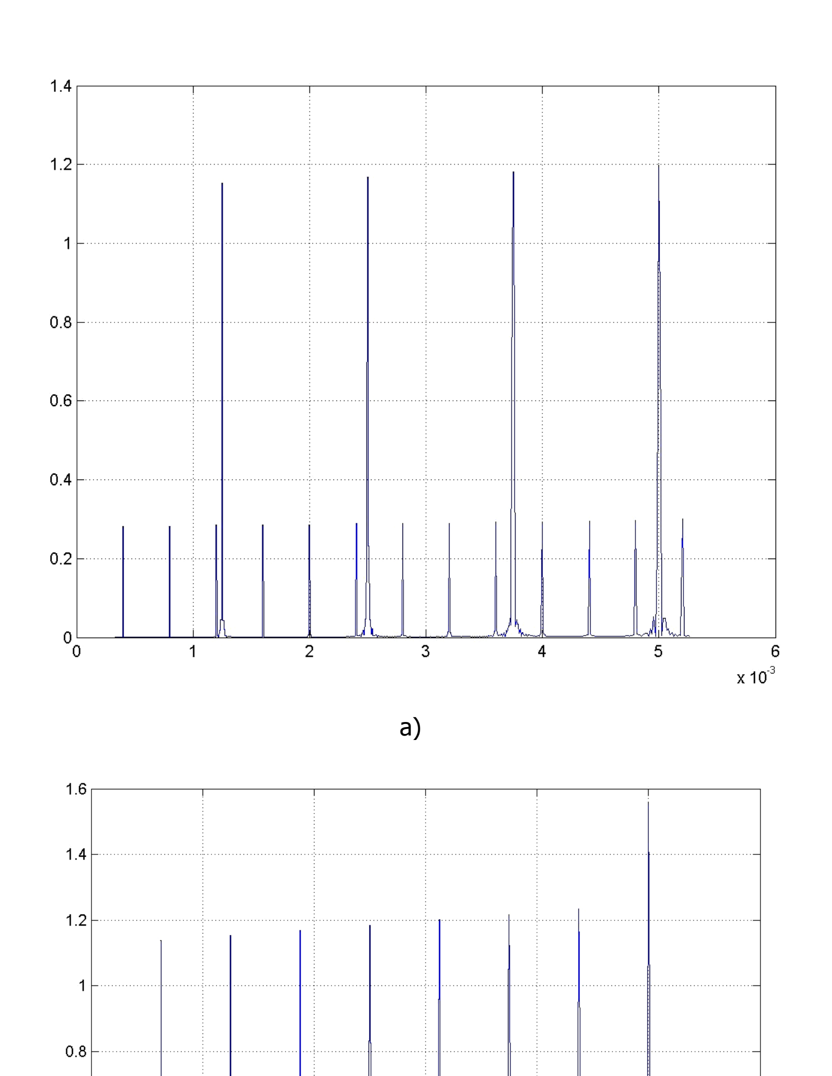


Рис.1. Пример реализации сигнала виброакустической эмиссии

На рис.2,а четко выражены всплески при периоде усреднения $T_1 = 1.25 \cdot 10^{-3}$ с и $T_1 n$, где $n \in \mathrm{N}$. А также при $T_2 = 0.4 \cdot 10^{-3}$ с и $T_2 n$, где $n \in \mathrm{N}$. На рис.2,б при $T_3 = 10^{-2}$ с наблюдается максимальный всплеск, обусловленный равенством $T_2 n_2 = T_1 n_1$, где $n_2, n_1 \in \mathrm{N}$. На рис.3,4 и 5

представлены результаты усреднения соответственно с периодами $T_1 = 1.25 \ 10^{-3}$ с , $T_2 = 0.4 \ 10^{-3}$ с и $T_3 = 10^{-2}$ с.



а)

б)

Рис.2. Зависимость средней мощности восстановленного сигнала от периода усреднения для функции скорости движения суппорта вдоль станины станка

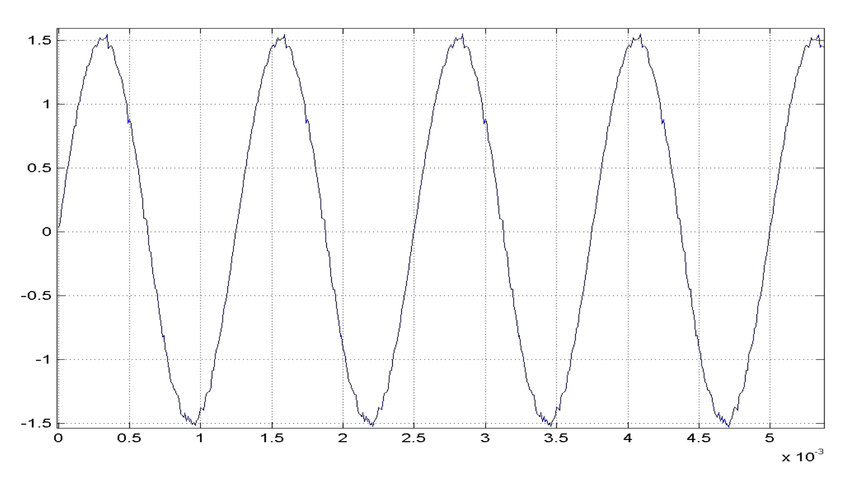


Рис.3. Результат усреднения с периодом $T_1 = 1.25 \cdot 10^{-3}$ с

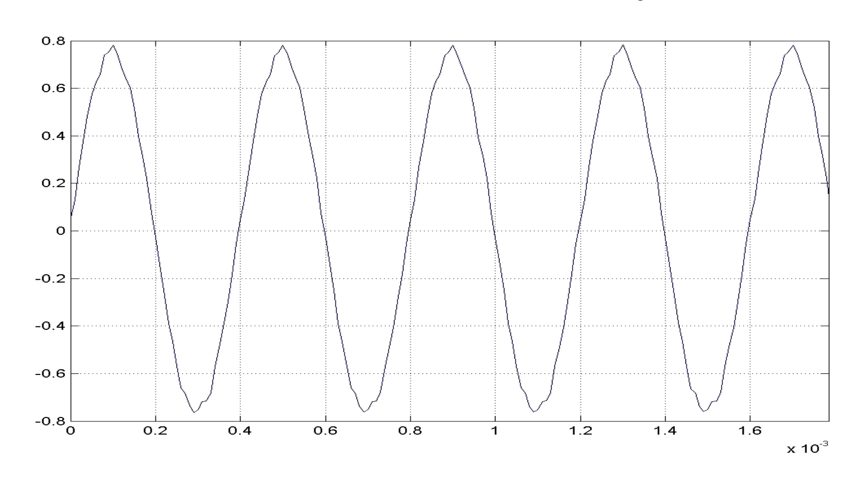


Рис.4. Результат усреднения с периодом $T_2 = 0.4 \cdot 10^{-3}$ с

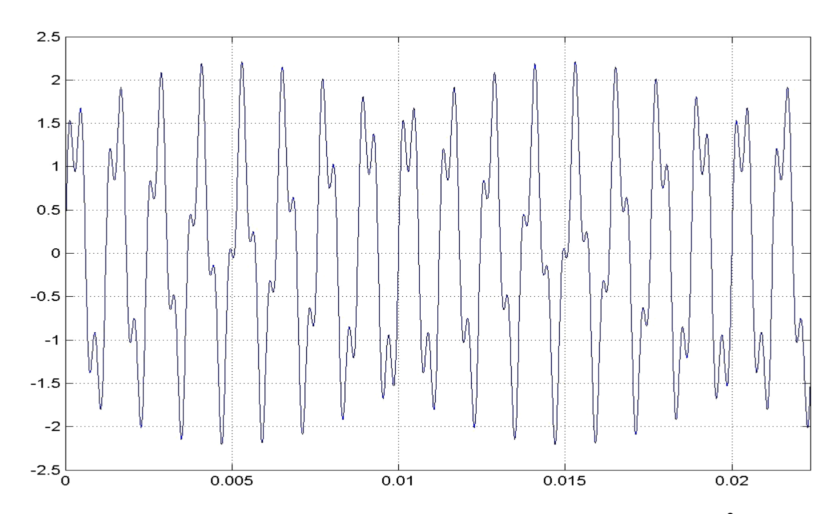


Рис.5. Результат усреднения с периодом $T_3 = 10^{-2}$ с

Приведенные результаты показывают, что с помощью предложенного алгоритма удается эффективно определять информацию о периодически повторяющихся с периодом вращения детали возмущениях.

Выводы: 1. Предложенный алгоритм позволяет определять периодически повторяющиеся изменения в сигнале виброакустической эмиссии, который имеет следующие прикладные значения:

- для целей обеспечения качества обработки деталей на металлорежущих станках;
- для целей виброакустической диагностики развивающихся по пространству дефектов в роторных системах (например, турбинах).

2. Аналитически доказана и экспериментально подтверждена сходимость представленного алгоритма.

Библиографический список

1. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятности / Б.В.Гнеденко. – М.: Наука, 1988. – 488 с.

Материал поступил в редакцию 12.12.07.

M.V.CHUVEYKO

ALGORITHM OF RESTORATION PERIODIC A SIGNAL IN ROTARY SYSTEMS

Given clause is devoted to a statement of algorithm of restoration of a periodic component of a signal in systems with an additive handicap of peak character at absence of aprioristic data on frequency of a restored signal.

ЧУВЕЙКО Михаил Викторович (р. 1984), магистрант кафедры «Автоматизация производственных процессов» ДГТУ. Окончил ДГТУ в 2007 г.
Научные интересы связаны с разработкой математических методов анализа технических систем, математическим моделированием.